EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Funkcija zadata formulom:

$$y = a^x \quad \text{gde je} \quad a \in R, a > 0, a \neq 1$$

se naziva eksponencijalna funkcija.

→ Funkcija $y = a^x$ je svuda definisana , znači za $\forall x \in R$

→ Za x = 0 je $y = a^o = 1$ pa funkcija prolazi kroz tačku (0,1), tj. tu seče *y*-osu.

→ Ako je $a > 0$ funkcija je rastuća

→ Ako je $0 < a < 1$ funkcija je opadajuća

→ Funkcija $y = a^x$ je uvek pozitivna, tj. grafik je iznad x-ose

→ Važe osnovna svojstva stepena:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

gde su $a > 0$, $b > 0$, $x, y \in R$

Primer 1. Nacrtati grafik funkcije $y = 2^x$

Rešenje:

Iskoristićemo tablicu vrednosti. Uzećemo proizvoljne *x*-seve i naći vrednosti za *y*.

Koje vrednosti je najbolje birati za *x* ?

Najčešće se uzimaju : od -3 do 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Ove vrednosti menjamo u $y = 2^x$ i popunjavamo tablicu:

Za x = -3 je $y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Za x = -2 je $y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Za x = -1 je $y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Za x = 0 je $y = 2^0 = 1$

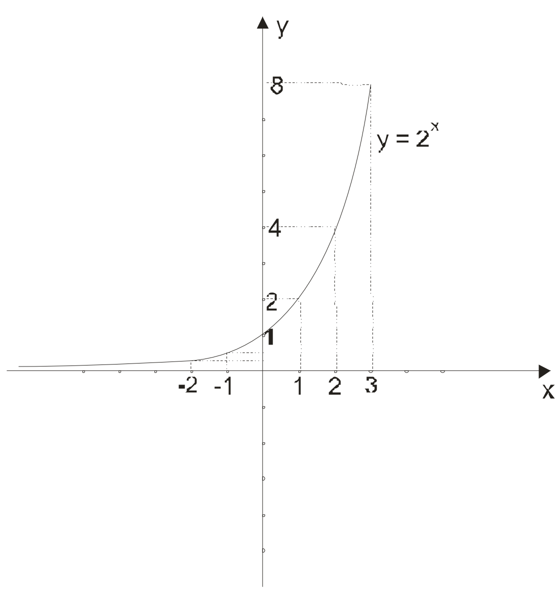
Za x = 1 je $y = 2^1 = 2$

Za x = 2 je $y = 2^2 = 4$

Za x = 3 je $y = 2^3 = 8$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Konstruišemo grafik:



→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$

→ y-osu seče u (0,1)

→ Pošto je $a = 2 > 0 \Rightarrow$ rastuća je

→ Uvek je pozitivna, tj. $y > 0$ za $\forall x \in R$

→ Prava $y = 0$ (x- osa) joj je horizontalna asimptota sa leve strane

Primer 2. Nacrtaj grafik funkcije $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

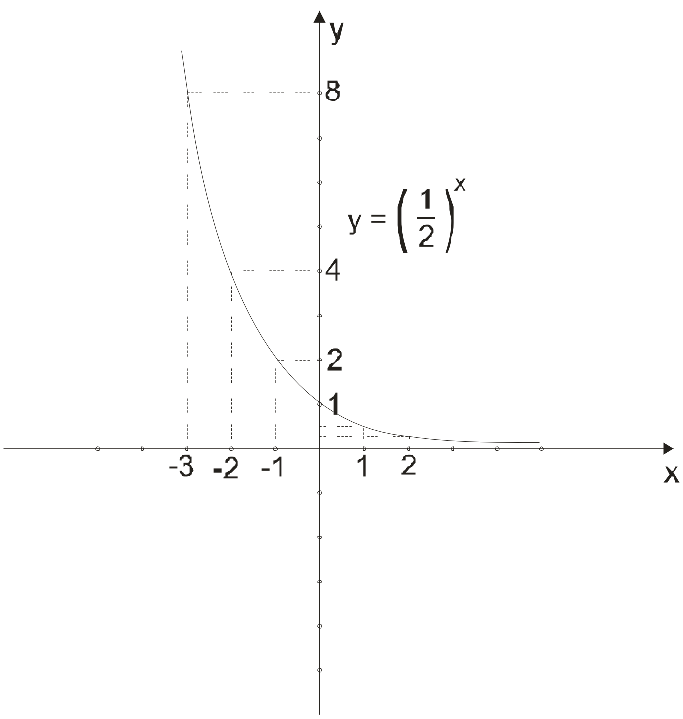
Rešenje:

Funkcija $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ je ustvari $y=2^{-x}$

Uzimamo iste vrednosti za x , od -3 do 3, nadjemo y i popunimo tablicu:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Sad sklopimo grafik:



→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$

→ y-osu seče u (0,1)

→ Kako je $a=\frac{1}{2}$, to jest $0<a<1$, funkcija je opadajuća

→ Uvek je pozitivna, $y>0$ za $\forall x \in R$

→ Prava $y = 0$ (x- osa) joj je horizontalna asimptota sa desne strane

Primer 3. Nacrtaj grafik funkcije

$$y = 2^x + 1$$

Rešenje:

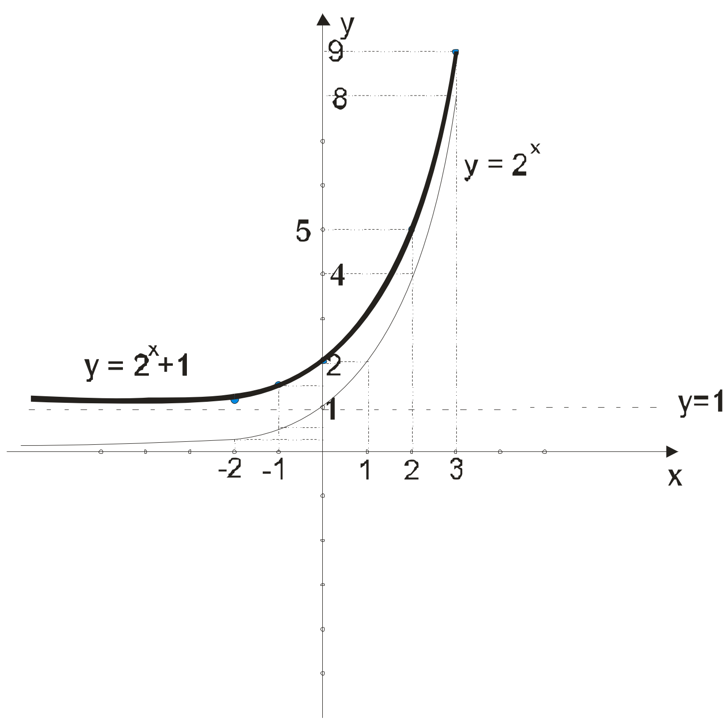
I ovde možemo napraviti tablicu vrednosti:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9

Ali je lakše da razmišljamo ovako:

Nacrtamo grafik $y = 2^x$ pa ga za 1 " podignemo'' po y-osi , tako dobijemo $y = 2^x + 1$

(Pogledajte fajl kvadratna funkcija, slična translacija je i tamo radjena)



→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$

→ y-osu seče u (0,2)

→ Pošto je $a = 2 > 0 \Rightarrow$ rastuća je

→ Uvek je pozitivna, tj. $y > 0$ za $\forall x \in R$

→ Prava $y = 1$ joj je horizontalna asimptota sa leve strane

Primer 4. Nacrtaj grafik funkcije: $y = 2^{x+1}$

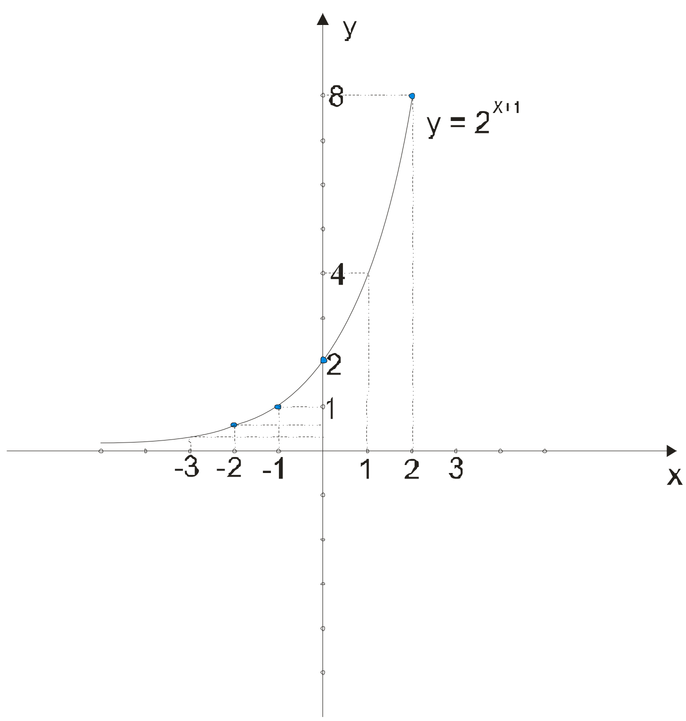
Rešenje:

Pazite, sada je $+1$ gore u eksponentu.

Napravimo tablicu vrednosti:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Naravno, ako vam se jave veliki brojevi u rešenju, tu tačku ne morate unositi na grafiku....



→ Funkcija je definisana za $\forall x \in R$

→ y-osu seče u (0,2)

→ Pošto je $a = 2 > 0 \Rightarrow$ rastuća je

→ Uvek je pozitivna, tj. $y > 0$ za $\forall x \in R$

→ Prava $y = 0$ joj je horizontalna asimptota sa leve strane

Primer 5. **Nacrataj grafik funkcije** $y = 2^{x+|x|}$

Rešenje:

Da se podsetimo definicije apsolutne vrednosti: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Ovde moramo crtati dva grafika. Evo kako razmišljamo:

$$y = 2^{x+|x|}$$

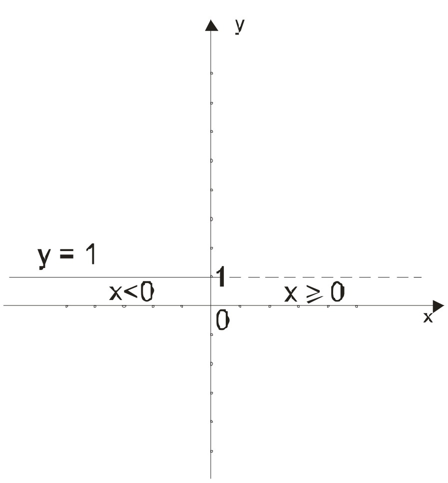
$x < 0$:

$$y = 2^{x-x}$$
$$y = 2^{0}$$
$$\boxed{y = 1}$$

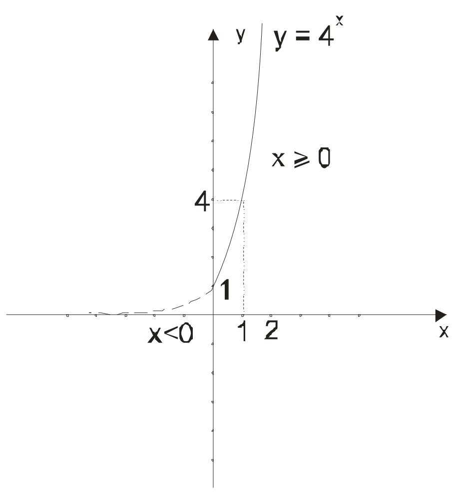
$x \geq 0$:

$$y = 2^{x+x}$$
$$y = 2^{2x}$$
$$\boxed{y = 4^{x}}$$

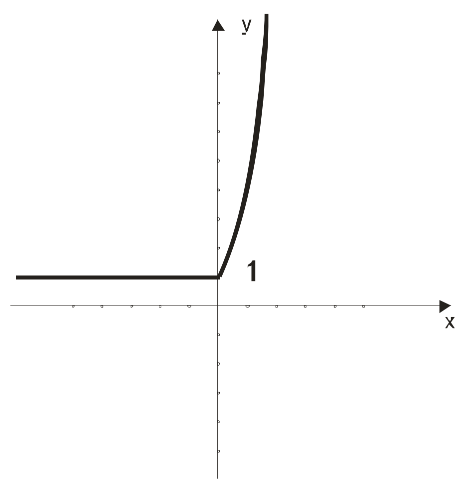
A grafici su:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Na slici 1. je grafik funkcije y = 1. On nam treba samo za x < 0.(Znači isprekidani deo nam ne treba!)

Na slici 2. je grafik funkcije $y = 4^x$. On nam treba samo za $x \geq 0$ (Isprekidani deo sa leve strane nam ne treba!)

Na slici 3. je konačan grafik funkcije $y = 2^{x+|x|}$.