# POLINOMI SA JEDNOM PROMENLJIVOM

Oblika su:

$$\boxed{P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}$$

Ovaj oblik se dobija "sredjivanjem” polinoma (sabiranjem, oduzimanje...) i naziva se kanonički, $x$-je promenljiva, $a_n, a_{n-1},...,a_0$ su koeficijenti (konstante), $n$ je prirodan broj ili nula.

Ako je $a_n \neq 0$, onda kažemo da je polinom $P$ stepena $n$, pa je $a_n$ “najstariji’’ koeficijenat.

**Primer:** $P(x)=4x^3+6x^2-2x+7$

- ovaj polinom je stepena 3 a najstariji koeficijenat je 4.

- **zanimljivo** je da se član bez $x$-sa, takozvani slobodni član dobija kad umesto x stavimo 0, tj. $P(0)=4\cdot 0^3+6\cdot 0^2-2\cdot 0+7=7 \to \quad P(0)=7$, ili za polinom $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \to P(0)=a_0$

- takodje ako umesto x stavimo 1 imamo $P(1)=a_n+a_{n-1}+...+a_0$

## SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA:

**Primer:** $P(x)=3x^3-4x^2+6x-7$

$Q(x)=4x^3-2x^2+12x+3$

$$P(x)+Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)+(4x^3-2x^2+12x+3)$$

$$=\underline{3x^3}-\underline{\underline{4x^2}}+\underline{\underline{\underline{6x}}}-7+\underline{4x^3}-\underline{\underline{2x^2}}+\underline{\underline{\underline{12x}}}+3$$

$=$ krenemo sa sabiranjem članova sa najvećim stepenom pa dok ne dodjemo do ‘’slobodnih članova’’, to jest onih bez $x$-sa

$$\boxed{=7x^3-6x^2+18x-4}$$

$$P(x)-Q(x)=(3x^3-4x^2+6x-7)-(4x^3-2x^2+12x+3)$$

$=$ **pazi: Minus ispred zagrade menja znak <u>svim</u> članovima u zagradi**

$$=\underline{3x^3}-\underline{\underline{4x^2}}+\underline{\underline{\underline{6x}}}-7-\underline{4x^3}+\underline{\underline{2x^2}}-\underline{\underline{\underline{12x}}}-3$$

$$=\boxed{-x^3-2x^2-6x-10}$$

Najbolje je da podvlačite **slične monome** kako se ne bi desila greška u sabiranju (oduzimanju)

# MNOŽENJE POLINOMA

**Primer 1.** Pomnožiti sledeće polinome:

$$P(x) = 2x - 3$$
$$Q(x) = x^2 + 4x - 7$$

**Rešenje:**

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7)$$

*Kako množiti?*

Množi se ‘’svaki sa svakim’’. **Najbolje je da prvo odredimo znak** $(+ \cdot + = +,\ - \cdot - = +,$ $+ \cdot - = -,\ - \cdot + = -)$, onda pomnožimo brojke ispred nepoznatih i na kraju nepoznate.
Naravno da je $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, itd. (ovde koristimo pravila iz stepenovanja: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$)
Vratimo se na zadatak:

$$(2x-3) \cdot (x^2 + 4x - 7) =$$

$2x^3 + 8x^2 - 14x - 3x^2 - 12x + 21 =$ sad saberemo ( oduzmemo) slične monome
$= 2x^3 + 5x^2 - 26x + 21$

**Primer 2.** Pomnožiti sledeće polinome:

$$A(x) = -x^2 + 4x - 7$$
$$B(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

**Rešenje:**

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (-x^2 + 4x - 7) \cdot (2x^2 + 5x + 1) \\ &= -2x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x^3 + 20x^2 + 4x - 14x^2 - 35x - 7 \\ &= -2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 31x - 7 \end{aligned}$$

# DELJENJE POLINOMA

Podsetimo se najpre deljenja brojeva.

Primer: $57146:23=2484$

$$\begin{array}{l} 57146:23=2484 \\ \underline{-46} \\ \;\;111 \\ \;\underline{-92} \\ \;\;\;194 \\ \;\underline{-184} \\ \;\;\;\;106 \\ \;\;\underline{-92} \\ \;\;\;\;\;14 \text{ - } \textit{ostatak} \end{array}$$

Možemo zapisati: $\dfrac{57146}{23}=2484+\dfrac{14}{23}$

$$\boxed{\frac{deljenik}{delilac}=rešenje+\frac{ostatak}{delilac}}$$

Probajmo sad sa polinomima:

**Primer 1:**

$$\begin{array}{l} (2x^2-5x+6):(x-2)=2x-1 \\ \underline{{}_{(-)}2x^2 -{}_{(+)}4x} \\ \quad\quad -x+6 \\ \quad\quad \underline{-_{+}x+_{-}2} \\ \quad\quad\quad\quad 4 \rightarrow \text{ Ostatak} \end{array}$$

Dakle:

$$\frac{2x^2-5x+6}{x-2}=2x-1+\frac{4}{x-2}$$

**POSTUPAK**

→ Podelimo "prvi sa prvim'' $\dfrac{2x^2}{x}=2x$ i upišemo *2x* u rešenju

→ 2x pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod deljenika $2x^2-4x$

→ promenimo znake (ono u zagradi)

→ **prvi se uvek skrate** a druge saberemo $-5x+4x=-x$

→ dopišemo +6

→ opet delimo "prvi sa prvim'' $\dfrac{-x}{x}=-1$

→ množimo sa deliocem

→ promenimo znake i saberemo

**Primer 2:**

$$(x^3+2x^2-4x+5):(x+1)=x^2+x-5$$

$$\begin{array}{l}
{}_{(-)}x^3 \underset{(-)}{+} x^2 \\
\hline
\quad x^2-4x \\
\quad {}_{(-)}x^2 \underset{(-)}{+} x \\
\hline
\qquad -5x+5 \\
\qquad \underset{(+)}{-}5x \underset{(+)}{-} 5 \\
\hline
\qquad\quad 10
\end{array}$$

**Dakle:**

$$\frac{x^3+2x^2-4x+5}{x+1}=x^2+x-5+\frac{10}{x+1}$$

**POSTUPAK**

→ Podelimo "prvi sa prvim'' $\frac{x^3}{x}=x^2$ upišemo $x^2$ u rešenje
→ $x^2$ pomnožimo sa deliocem i potpišemo ispod deljenika $x^3+x^2$
→ promenimo znake kod $x^3+x^2$ u $-x^3-x^2$
→ prvi se uvek "skrate'', a $2x^2-x^2=x^2$
→ spustimo - 4x
→ opet "prvi u prvom'' $\frac{x^2}{x}=x$
→ x množimo sa deliocem
→ menjamo znake kod $x^2+x$ u $-x^2-x$
→ prvi se skrate a -4x-x=-5x
→ spuštamo +5
→ $\frac{-5x}{x}=-5$
→ -5·(x+1)=-5x-5
→ promenimo znake i prvi se skrate
→ 5+5=10

**Primer 3:**

$$(x^4-3x^3+2x^2+x-5):(x^2+2x-3)=x^2-5x+15$$

$$\begin{array}{l}
{}_{-}x^4 \underset{(-)}{+} 2x^3 \underset{(+)}{-} 3x^2 \\
\hline
\quad -5x^3+5x^2+x \\
\quad \underset{(+)}{-}5x^3 \underset{(+)}{-} 10x^2 \underset{(-)}{+} 15x \\
\hline
\qquad 15x^2-14x-5 \\
\qquad {}_{(-)}15x^2 \underset{(-)}{+} 30x \underset{(+)}{-} 45 \\
\hline
\qquad\qquad -44x+40 \rightarrow \text{ ostatak}
\end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^3+2x^2+x-5}{x^2+2x-3}=x^2-5x+15+\frac{-44x+40}{x^2+2x-3}$$

**Primer 4:**

$(x^4 - 1):(x-1) = x^3 + x^2 + x + 1$

$\underset{(-)}{} x^4 \underset{(+)}{-} x^3$

$+x^3 - 1$

$\underset{(-)}{+} x^3 \underset{(+)}{-} x^2$

$x^2 - 1$

$\underset{(-)}{} x^2 \underset{(+)}{-} x$

$x - 1$

$\underset{(-)}{} x \underset{(+)}{-} 1$

Nema ostatka

**PAZI:**

Kad skratimo "prve'' a drugi nisu istog stepena prepišemo ih, prvo onaj sa većim pa sa manjim stepenom, to jest: $+x^3-1$

Dakle: $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1$

U nekim zadacima interesovaće nas samo ostatak koji se dobija deljenjem dvaju polinoma a ne i količnik. Tu nam pomaže **Bezuova teorema:**

**Ostatak pri deljenju polinoma P(x) sa (x-a) jednak je P(a), to jest vrednosti**

**polinoma P(x) u tački x = a. Ako je P(a)=0, deljenje je bez ostatka.**

**Primer 1:** *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* $x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ *sa* $x - 2$

Najpre rešimo x-2=0, pa je **x = 2**

onda uporedjujemo x-a i x-2→ *a=2*

Sada je $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 7$

$P(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 7$

$P(2) = 8 - 20 + 12 - 7$

$P(2) = -7 \Rightarrow$ **Ostatak je -7**

**Primer 2:** *Nadji ostatak pri deljenju polinoma* $2x^3 - 5x + 6$ *sa* $x + 1$

Pazi , ovde je *a = -1*, jer je x+1=0

*x = -1*

$P(x) = 2x^2 - 5x + 6$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6$

$P(-1) = 2 + 5 + 6$

$P(-1) = 13 \Rightarrow$ Ostatak je 13

Još jedna izuzetna primena Bezueve teoreme je kod rastavljanja polinoma na činioce. Mi smo do sada naučili da faktorišemo polinome drugog stepena. Za polinome trećeg i četvrtog stepena postoje algoritmi, ali su suviše teški, dok za polinome petog i većeg stepena ne postoji univerzalan način da se faktorišu, odnosno reše.
*Kako nam to pomaže Bezuova teorema?*

**Primer 1: Dat je polinom** $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ **Izvrši njegovu faktorizaciju.**

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

**za x=1**

$P(x) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6$

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6$

$P(1) = 0$

**POSTUPAK**

→ uočimo ''slobodan'' član, to jest onaj bez x-sa.
**ovde je to 6.**
→ on se može podeliti: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6
→redom zamenjujemo ove brojeve dok ne dobijemo da je $P(a) = 0$
→ našli smo da je *a=1*
→ podelimo polinom sa $(x - a) = (x - 1)$

$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$

$\underset{(-)}{x^3} \underset{(+)}{- x^2}$

$-5x^2 + 11x$

$\underset{(+)}{-5x^2} \underset{(-)}{+5x}$

$6x - 6$

$\underset{(-)}{6x} \underset{(+)}{- 6}$

Nema ostatka

Ovim smo smanjili stepen polinoma i sad već $x^2 - 5x + 6$ znamo da rastavljamo

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 \\ &= x(x-2) - 3(x-2) \\ &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Dakle: $\boxed{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)}$

**Primer 2:**

**Izvršiti faktorizaciju polinoma**: $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

Posmatrajmo broj 4 (slobodan član). Pošto njega možemo podeliti sa
+1, -1, +2, -2,+4, -4, redom menjamo u polinom dok ne bude P(a)=0

Za **x = 1** $P(1) = 1^4 - 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 4 + 4 = 4 \neq 0$

Idemo dalje:
Za **x = -1**

$$P(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 4 + 4 = 0$$

Dakle, delimo sa $x - (-1) = x + 1$

$$(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) : (x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\begin{array}{l}
\underset{(-)}{x^4} \underset{(-)}{+ x^3} \\
\hline
-3x^3 - 3x^2 \\
\underset{(+)}{-3x^3} \underset{(+)}{-3x^2} \\
\hline
4x + 4 \\
\underset{(-)}{4x} \underset{(-)}{+ 4} \\
\hline
\end{array}$$

Dalje gledamo $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ , njegov slobodan član je 4, pa opet redom ispitujemo:

Za **x = -1** $P_1(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$

Opet delimo sa (x+1)

$$(x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$$

Znamo da je : $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

**Konačno rešenje je:**

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 &= (x+1)(x+1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x+1)^2 (x-2)^2 \end{aligned}$$

**Primer 3:**

**Odrediti realan parametar *m* tako da polinom** $P(x)=x^5+mx^3+3x^2-2x+8$ **bude deljiv sa x + 2.**

*Rešenje:*

Iz x+2 = 0 je x = -2 , pa je *a = -2*

$$P(x)=x^5+mx^3+3x^2-2x+8$$
$$P(-2)=(-2)^5+m(-2)^3+3(-2)^2-2(-2)+8$$
$$P(-2)=-32-8m+12+4+8$$
$$P(-2)=-8m-8$$

$\boxed{P(-2)=0}$ jer u zadatku kaže da je P(x) deljiv sa -2

$$-8m-8=0$$
$$\boxed{m=-1}$$

**Primer 4:**

**Odrediti realne vrednosti parametara *a* i *b* tako da polinom** $P(x)=ax^3-bx^2-5x+4$ **pri deljenju sa** $x+1$ **daje ostatak 6, a pri deljenju sa** $x-1$ **daje ostatak 2.**

*Rešenje:*

Kako pri deljenju sa $x+1$ daje ostatak 6, to je $\boxed{P(-1)=6}$

$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$

$P(-1) = a(-1)^3 - b(-1)^2 - 5(-1) + 4$

$P(-1) = -a - b + 9$

$-a - b + 9 = 6$

$-a - b = -3$

$\boxed{a + b = 3}$

Kako pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2, to je $\boxed{P(1) = 2}$

$P(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$

$P(1) = a \cdot 1^3 - b \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4$

$P(1) = a - b - 1$

$a - b - 1 = 2$

$\boxed{a - b = 3}$

Dalje oformimo sistem jednačina:

$a + b = 3$

$\underline{a - b = 3}$

$a \cancel{+b} = 3$

$\underline{a \cancel{-b} = 3}$

$2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 0$

Rešenja su $a = 3, b = 0$