EKSPONENCIJALNE NEJEDNAČINE

Eksponencijalne nejednačine su nejednačine kod kojih se nepoznata (ili nepoznate) nalazi i u eksponentu .

Na osnovu monotonosti (rašćenje i opadanje) za eksponencijalne funkcije važi:

1) za $a > 1$ je $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
2) za $0 < a < 1$ je $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Znači:

- **kad je osnova veća od jedan znak nejednakosti prepisujemo!**

- **kad je osnova izmedju 0 i 1 smer nejednakosti se okreće !**

<u>Primeri:</u>

1. Rešiti nejednačine:

a) $5^{-7x+3} > 5^{-3}$
b) $0{,}35^{x-1} < 0{,}35^{2x+2}$
c) $2^{x^2-3} > 2$
d) $2^x < 7^x$

Rešenja:

a) $5^{-7x+3} > 5^{-3} \rightarrow$ pošto je osnova $5 > 1$ znak prepisujemo!

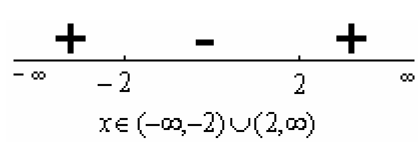
$$-7x+3 > -3$$
$$-7x > -3-3$$
$$-7x > -6$$
$$x < \frac{6}{7}$$

b) $0{,}35^{x-1} < 0{,}35^{2x+2} \rightarrow$ pazi osnova je 0,35 a $0 < 0,35 < 1$, pa okrećemo smer nejednakosti!

$$x-1 > 2x+2$$
$$x-2x > 2+1$$
$$-x > 3$$
$$x < -3$$

v) $2^{x^2-3} > 2$

$$2^{x^2-3} > 2^1$$
$$x^2-3 > 1$$
$$x^2-4 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -2$$



g) $2^x < 7^x$

$\frac{2^x}{7^x} < 1$

$\left(\frac{2}{7}\right)^x < 1$

$\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^o \rightarrow$ pošto je osnova izmedju 0 i 1 smer nejednakosti se okreće

x > 0

2) Rešiti nejednačine:

a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$
b) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$
v) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

$5^{2x} \cdot 5^1 - 5^x - 4 > 0 \rightarrow$ smena $5^x = t$

$t^2 \cdot 5 - t - 4 > 0$

$5t^2 - t - 4 = 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10}$

$t_1 = 1$

$t_2 = -\frac{4}{5}$

Kvadratni trinom ima znak broja a (ovde je a = 5) svuda osim izmedju nula (rešenja).

$t \in (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (1, \infty)$

vratimo se u smenu:

$5^x = -\frac{4}{5}$ ili $5^x = 1$

nema rešenja $x = 0 \rightarrow x \in (0, \infty)$

sad se interval $t \in (1, \infty)$ transformiše u $x \in (0, \infty)$ što je konačno rešenje.

b) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$

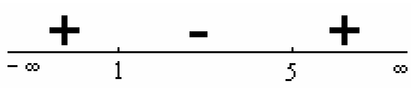
$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0 \rightarrow$ smena $5^x = t$

$t^2 - 6t + 5 < 0$

$t_{1,2} = \dfrac{6 \pm 4}{2}$

$t_1 = 5$

$t_2 = 1$



Znači $t \in (1,5)$, vratimo se u smenu

$5^x = 1$ ili $5^x = 5$

$x = 0$ $x = 1$

Tako da je sada konačno rešenje $x \in (0,1)$

v) $\sqrt{9^x - 3^x \cdot 3^2} > 3^x - 9$

$\sqrt{3^{2x} - 3^x \cdot 9} > 3^x - 9 \rightarrow$ smena $3^x = t$

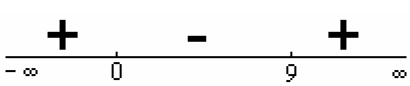
$\sqrt{t^2 - 9t} > t - 9$ (vidi iracionalne nejednačine)

$\left[t^2 - 9t \geq 0 \wedge t - 9 < 0\right]$ $\vee$ $\left[t^2 - 9t \geq (t-9)^2 \wedge t - 9 \geq 0\right]$

$t_{1,2} = \dfrac{9 \pm 9}{2}$ $\quad t < 9$

$t_1 = 0$

$t_2 = 9$



$t \in (-\infty, 0] \cup [9, \infty)$ i $t < 9$

Ova dva uslova daju:

$t \in (-\infty, 0]$

ovaj interval " ne radi '' jer je $3^x = t$

$t^2 - 9t > t^2 - 18t + 81$

$-9t + 18t > 81$ $\quad t \geq 9$

$9t > 81$

$t > 9$

Znači $t > 9$

$3^x > 9$

$3^x > 3^2$

$\boxed{x > 2}$

Konačno rešenje